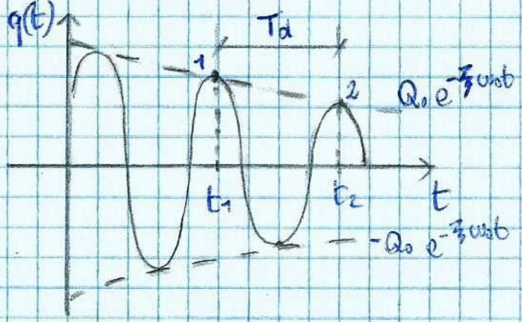
# Decadimento logaritmico

Il decadimento logaritmico $\delta$ è la grandezza che compare negli Eurocodici al posto dello smorzamento $\xi$. La dissipazione è puramente viscosa:




$$\omega_d = \omega_0\sqrt{1-\xi^2}$$

Rapporto tra i punti 1 e 2:

$$\frac{q_1}{q_2} = \frac{\cancel{Q_0} e^{-\xi\omega_0 t_1}\cancel{\cos(\omega_d t_1+\phi)}}{\cancel{Q_0}\cdot e^{-\xi\omega_0 t_2}\cancel{\cos(\omega_d t_2+\phi)}}$$

Essendo $t_2 = t_1 + 2\pi$ i due coseni sono uguali e si semplificano. Quindi:

$$\frac{q_1}{q_2} = e^{-\xi\omega_0(t_1-t_2)} = e^{-\xi\omega_0 T_d} \iff \ln\left(\frac{q_1}{q_2}\right) = \xi\cdot\omega_0 T_d$$

Ma $T_d = \frac{1}{f_d} = \frac{2\pi}{\omega_d} = \frac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1-\xi^2}}$. Pertanto, detto $\delta := \ln\left(q_1/q_2\right)$:

$$\delta = \frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \Rightarrow \delta\sqrt{1-\xi^2} = 2\pi\xi \Rightarrow \delta^2(1-\xi^2) = 4\pi^2\xi^2$$

$$\Rightarrow 4\pi^2\xi^2 + \delta^2\xi^2 = \delta^2 \Rightarrow \xi^2(4\pi^2+\delta^2) = \delta^2 \Rightarrow \xi = \frac{\delta}{\sqrt{4\pi^2+\delta^2}}$$

Una formula semplificata, ma ugualmente adottata, si ottiene se $\xi \ll 1$:

$$\delta \cong 2\pi\xi \qquad \xi \cong \frac{\delta}{2\pi}$$

Considerando i valori dell'Eurocodice:

- edificio in CA: $\xi_{CA} \cong \frac{0{,}10}{2\pi} \cong 0{,}016 \cong 1{,}5\%$;
- edificio in acciaio: $\xi_{acc} \cong 0{,}008 \cong 1\%$

Si tratta di due esempi: si possono trovare anche valori maggiori. Per gli stati limite ultimi è possibile arrivare anche a $\xi$ pari al 5% (ad esempio per edifici in CA soggetto a sisma). Finora si era parlato solo di stati limite di esercizio.

Essendo $\xi$ incerto per sua natura (dipende da molteplici fattori) è possibile eseguire una prova sulla struttura costruita per ottenere valori più attendibili. È detta prova full-scale. Per le strutture flessibili leggere si applicano vibrazioni libere, negli altri casi si sfruttano quelle ambientali. Per le misurazioni di accelerazioni e spostamenti si usano gli accelerometri e i laser che inviano i dati ad una scheda di acquisizione collegata ad un PC.

Nella realtà, in generale, lo smorzamento non è perfettamente viscoso. Per questo i punti ottenuti durante le misurazioni generano una curva oscillante i cui picchi non sono disposti esattamente lungo la curva esponenziale $Q_0 \cdot e^{-\xi \omega_0 t}$ (e analogamente lungo $-Q_0 e^{-\xi \omega_0 t}$). Per i sistemi reali si introduce allora lo smorzamento viscoso equivalente. Si considera una serie di $j$ punti:

$$q_1, \dots, q_j \qquad t_1, \dots, t_{1+j} T_d \qquad j = 1, 2, \dots$$

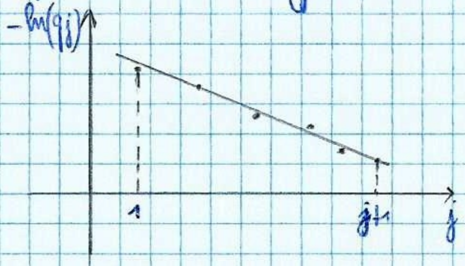
$$\Rightarrow \frac{q_1}{q_{j+1}} = \frac{q_1}{q_2} \cdot \frac{q_2}{q_3} \cdot \ldots \cdot \frac{q_j}{q_{j+1}} = e^{\frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} j}$$

$$\Rightarrow \delta := \ln\left(\frac{q_1}{q_2}\right) = \frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} = \frac{1}{j} \cdot \ln\left(\frac{q_1}{q_{j+1}}\right)$$

$\delta$, il decadimento logaritmico introdotto nella definizione di $\ln(q_1/q_2)$, può essere quindi interpretato come pendenza della retta seguente ($j = 1, 2, \dots$)

$$\delta = \frac{1}{j} \ln(q_1/q_{j+1}) \Rightarrow \delta j = \ln(q_1) - \ln(q_{j+1}) \Rightarrow \ln(q_{j+1}) = -\delta j + \ln(q_1)$$

Sul piano semilogaritmico:




Si determina la retta meglio approssimante (ad esempio con i minimi quadrati) per ottenere il miglior smorzamento viscoso equivalente.

In altre parole al sistema reale viene associata la $\xi$ del sistema ideale che è ad esso più prossimo.
Lo smorzamento è una quantità incerta (stima diversa a seconda della tecnica usata): $\xi(\delta)$ dipende infatti, in generale, dall'ampiezza dell'oscillazione.